Selbstverifizierende Kodierungen

Hamming-Code

Der erste fehlerkorrigierende Code wurde von Richard Hamming gleich zu Beginn des Computerzeitalters 1948 entwickelt. Er zeigt das Grundprinzip so deutlich, dass wir ihn uns genauer ansehen.

Ein wesentlicher Begriff der Codierungstheorie ist der folgende:  
Die Parität einer Bitfolge ist 0, wenn die Anzahl der 1 in der Folge gerade ist.  
Die Parität einer Bitfolge ist 1, wenn die Anzahl der 1 in der Folge ungerade ist.

Beispiel: Die Parität von 11101011 ist 0, die Parität von 11101010 ist 1.

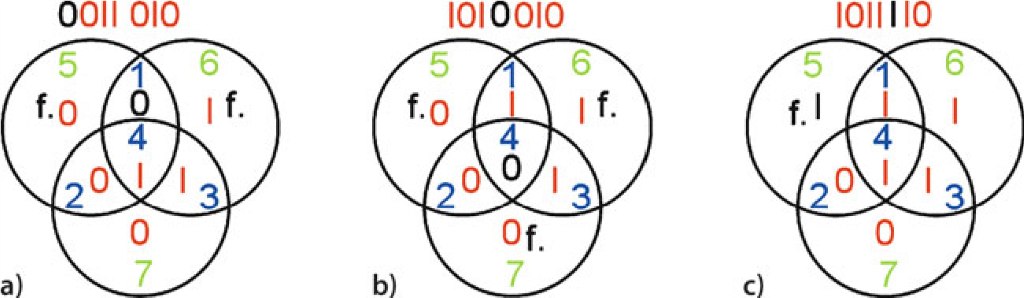
Übrigens schreibt man in der Handschrift gern die 1 in einer Bitfolge als einfachen Strich. Dann kann man gleich Bitfolgen von Dezimalzahlen unterscheiden.

Zu je vier eigentlich zu sendenden Bits der Nachricht werden drei „Korrekturbits“ berechnet und angehängt. Die folgenden Abbildungen verdeutlichen das Vorgehen:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Gegeben ist dieses Venn-Diagramm. | Schreibe die Nachricht (I0II) in die blauen Felder 1, 2, 3, 4. |
|  |  |
| Schreibe in die grünen Felder 5, 6 und 7 die Parität der im zugehörigen Kreis stehenden Bits. | Hänge die Bits der Felder 5, 6, 7 an die Nachricht an. Der Empfänger trägt die sieben Bits in die Felder in ein leeres Venn-Diagramm und prüft, ob die Paritäten übereinstimmen. |

Im Beispiel der Abbildung ist dargestellt, dass statt der Nachricht I0II die Bitfolge I0II 0I0 gesendet wird. Nur vier dieser sieben Bits tragen die eigentliche Information. Daher sagt man auch, der Hamming-Code habe einen Informationsgehalt von vier Siebenteln.

Die Schülerinnen übermitteln einander:



Fehler in der Sendung

Wir betrachten die Fälle, bei denen beim Senden der Nachricht nur ein einziger Fehler auftritt. Dann gibt es drei Fehlertypen.

Typ 1

In Abb. a) ist eins der ersten drei Bits falsch übermittelt, hier schwarz in Feld 1 dargestellt. 0011010 wurde empfangen. Dann zeigt aber Bit 5 etwas Falsches an, denn die Felder 1, 2 und 4 haben nun nur eine 1, darum müsste in Feld 5 eine 1 stehen. Ebenso passt der Eintrag in Feld 6 nicht mehr. Aber in Feld 7 steht weiterhin das Richtige. Wenn der Empfänger also die Bitfolge prüft, merkt er, dass genau zwei Fehler aufgetreten sind, nämlich in Feld 5 und 6, darum muss – es durfte ja nur ein Fehler beim Senden auftreten – Feld 1 falsch sein. Da dort das Bit 0 angekommen ist, hätte es eine 1 sein müssen. Also korrigiert der Empfänger den Fehler und nimmt als Nachricht nun 1011010 an. Ebenso können Einzelfehler in Feld 2 oder 3 korrigiert werden.

Typ 2

In Abb. b) ist das vierte Bit falsch übermittelt, hier schwarz in Feld 4 dargestellt. 1010010 wurde empfangen. Nun sind ebenfalls die Felder 5 und 6 falsch, aber auch Feld 7. Hieraus schliesst der Empfänger, dass das Bit in Feld 4 falsch angekommen ist. Er berichtigt es und nimmt als Nachricht nun 1011010 an.

Typ 3

In Abb. c) ist eins der Korrekturbits falsch übermittelt, hier schwarz in Feld 5 dargestellt. 1011110 wurde empfangen. Von diesem Fehler sind die Felder 6 und 7 nicht berührt, ausschliesslich Feld 5 zeigt etwas Falsches an. Daraus schliesst der Empfänger, dass nur das Bit in Feld 5 selbst falsch angekommen ist. Er berichtigt es und nimmt als Nachricht nun 1011010 an. Ebenso geht es bei Einzelfehlern in Feld 6 oder 7.

Wir haben gesehen: Der Hamming-Code kann Einzelfehler immer korrigieren.

Wenn also in einer sehr langen Bitfolge in keinem Siebenerblock mehr als ein Übertragungsfehler auftritt, ist am Ende dennoch die ganze Folge vollständig richtig.